
Edlisefnafræði 1

Midannarpróf, 12. október 2006, 8:20-9:50.

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivélar og stærðfræðihandbækur

Prófid samanstendur af 2 spurningum og er á 3 bladsíðum. Aftast er tafla yfir jöfnur.

Mikilvægt er að rökstyðja öll svör.

Spurning 1: (20 pts)

In English:

Consider a particle in a box where the potential is zero between $x = 0$ and $x = a$, but infinite elsewhere. The system is prepared in such a way that the wavefunction is

$$\psi(x) = N(\sin(2\pi x/a) + 2\sin(4\pi x/a))$$

where N is a constant.

- (a) Find the value of the normalization constant, N .
- (b) What is the probability that a measurement of the total energy of the system will give the ground state energy? Explain your answer.
- (c) What is the expectation value of the total energy in the state $\psi(x)$?
- (d) Assume that a measurement of the total energy is made and the value found is the energy of the first excited state. What is the wavefunction describing the system after the measurement?

Á Íslensku:

Ögn er komid fyrir í kassa með stöðuorku núll milli $x = 0$ og $x = a$, en óendanleg annars stadar. Bylgjufallid er

$$\psi(x) = N(\sin(2\pi x/a) + 2\sin(4\pi x/a))$$

med N sem fasta.

- (a) Finndu gildi normunarfastans, N .
- (b) Hverjar eru líkurnar á að mæling á orkunni gefi grunnástandsorkuna? Útskýrdu svarid.
- (c) Hvað er væntigildi orkunnar í ástandinu $\psi(x)$?
- (d) Gerum ráð fyrir að orkan sé mæld og að útkoman sé orka fyrsta örvada ástandsins. Hvada bylgjufall lýsir kerfinu eftir mælinguna?

Spurning 2: (10 punktar)

In English:

Consider a particle in a two-dimensional box defined by the rectangle $0 < x < a$ and $0 < y < b$

- (a) Write down an expression for the energy levels and the corresponding stationary state wavefunctions of the particle.
- (b) Sketch contour plots of the probability density for the three lowest energy stationary states. Write below each of the three figures the value of the quantum numbers characterizing the state (horizontal axis is x-axis, vertical axis is y-axis).
- (c) Assuming $a = b$, what is the degeneracy of the first four energy levels?

Á Íslensku:

Ögn er komid fyrir í tvívíðum kassa sem afmarkast af rétthyrndu svæði $0 < x < a$ og $0 < y < b$

- (a) Skrifadu nidur líkingu fyrir mögulegum gildum á orku kerfisins og samsvarandi bylgjuföllum.
- (b) Skissadu hæðarlínur fyrir líkindadreifingu í 3 orkulægstu ástöndunum. Fyrir hverja mynd, a-c, skrifadu skammtatölurnar sem einkenna ástandid (lárétti ásinn er x-ás, sá lódrétti y-ás).
- (c) Ef gert er ráð fyrir ad $a = b$, hver er margfeldni fjögurra lægstu orkugildanna?

Spurning 3: (30 punktar)

In English:

A hydrogen atom adsorbed on the surface of a metal crystal can be considered as a quantum particle moving in a periodic potential (the metal atoms are considered to be stationary because they are so much heavier than the hydrogen atom). The potential energy of the hydrogen atom can be approximated by the function

$$V(x) = V_s e^{-\cos(2\pi x/b)}.$$

- (a) Sketch (qualitatively) the potential energy function. Label the axes, mark the values $x = b$ and $E_{pot} = V_s$, and indicate on the x -axis the locations where the H-atom would sit if it had no kinetic energy and had minimal potential energy.
- (b) Derive an expression for the force acting on the hydrogen atom at an arbitrary position x .
- (c) Expand $V(x)$ in a Taylor series about one of the minima up to second order in x and give an expression for the force constant, k , of the harmonic oscillator approximation to $V(x)$ in terms of V_s , b and other constants.

- (d) What is the value of the zero-point energy of the hydrogen atom within the harmonic approximation described in part (c)?
- (e) What would the energy of a photon need to be in order to excite the hydrogen atom from the ground state to the first excited state (assuming the harmonic approximation is valid)?
- (f) Given that the hydrogen atom only has three bound states in each of the wells in the potential $V(x)$, sketch (qualitatively) the photo-absorption spectrum for the hydrogen atom assuming that all levels are roughly equally populated before the photoexcitation?

Á Íslensku:

Vetnisatómi sem sogast hefur á yfirbord málmkristals er hægt að líkja við skammtafræðilega ögn í lotubundnu stöduorku mætti (hægt er að líta svo á að málmatómin séu kyrr vegna hins stóra massamunar). Stöduorku agnarinnar er hægt að nálga með fallinu

$$V(x) = V_s e^{-\cos(2\pi x/b)}.$$

- (a) Teiknadu (í meginatriðum) stöduorkufallid $V(x)$. Merktu ásana vandlega og sýndu hvar gildin $x = b$ og $E_{pot} = V_s$ eru, og svo hvar vetnisatómid myndi sitja ef hreyfiorkan er engin og stöduorkan er í lágmarki.
- (b) Leiddu út líkingu fyrir kraftinn sem virkar á vetnisatómid í stadsetningu x .
- (c) Nálgadu $V(x)$ í kringum eitt af lágmrökunum með Taylörred upp í adra grádu með tilliti til x of finndu líkingu fyrir gormafastann, k , í kjörsveifilsnálguninni fyrir $V(x)$. Líkingin getur innihaldid fastana V_s og b svo og almenna fasta.
- (d) Hver er núllpunktsorka vetnisatómsins innan kjörsveifilsnálgunarinnar sem lýst er í lid (c)?
- (e) Hvada orku ætti ljóseind að hafa til að geta örvad vetnisatómid frá grunnástandi upp í fyrsta örvada ástand (innan kjörsveifilsnálgunarinnar)?
- (f) Teiknadu gróflega litróf sem samsvarar ljóseindagleypni vetnisatómsins og gerdu ráð fyrir að vetnisatómid hafi aðeins 3 bundin ástönd í hverjum stöduorkubrunni fallsins $V(x)$. Gerdu ráð fyrir að álíka mörg vetnisatóm séu í hverju af ástöndunum.