Töluleg lausn upphafsgildisverkefna

Finnbogi Óskarsson

Þegar náttúrunni er lýst stærðfræðilega koma fá verkefni oftar fyrir en lausn upphafsgildisverkefna, þ.e. afleiðujafna með upphafsskilyrðum. Slík skilyrði eru alla jafna gildi fallsins og/eða afleiðu þess í tilteknum punktum. Oft er erfitt eða ómögulegt að skrifa niður nákvæma lausn slíks verkefnis og þá er heppilegt að geta leyst þau tölulega. Ýmsar aðferðir hafa verið þróaðar til að leysa upphafsgildisverkefni tölulega. Við munum skoða eina þeirra, *aðferð Eulers*. Notum hana til að leysa almenna upphafsgildisverkefnið

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

tölulega. Skrifa má lausnina $x(t)$ sem heildi á eftirfarandi hátt

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

þar sem s er tímahnitið í heilduninni. Ekki er hægt að leysa þetta heildi fyrir öll $f(t,x)$ og því veljum við $t_1 > t_0$ og nálgum heildið með Riemann-summu, þar sem við notum fallgildið í vinstri endapunktinum sem hæð rétthyrningsins

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))ds \approx (t_1 - t_0)f(t_0, x(t_0)) \equiv h_1 f(t_0, x_0).$$

Skilgreinum þá $x_1 = x_0 + h_1 f(t_0, x_0)$. Gerum nú ráð fyrir að $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \ldots (t_n, x_n)$ hafi verið ákvörðuð. Lausnin $x(t)$ uppfyllir þá

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_n) + \int_{t_n}^{t} f(s, x(s))ds \\ &\approx x_n + (t - t_n)f(t_n, x_n) \end{aligned}$$

Ákveðum þá stærð næsta skrefs $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ og reiknum x-gildi næsta nálgunarpunkts, nefnilega

$$x_{n+1} = x_n + h_{n+1} f(t_n, x_n).$$

Dæmi. Leysum upphafsgildisverkefnið

$$\begin{cases} x' &= x^2 + x \sin t \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

fyrir $t \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$.

Lausn: Gerum ráð fyrir að búið sé að ákvarða n fyrstu nálgunarpunktana og látum skrefstærðina vera fasta. Þá er

$$x_{n+1} = x_n + h_{n+1}(x_n^2 + x_n \sin t_n)$$

Nálgunargildin fara eftir því hve stór skref eru tekin. Í töflunni hér að neðan eru nálgunargildin $x(t)$ reiknuð með mismunandi skrefstærð.

t	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.1	1.1000	1.1077	1.1121
0.2	1.2320	1.2524	1.2642
0.3	1.4082	1.4501	1.4750
0.4	1.6482	1.7280	1.7777